

Niepewności pomiarowe

Przypomnij sobie zanim zaczniesz:	Tego się dowiesz:
• jak policzyć średnią i odchylenie standardowe; • jak zapisać sumę wyrazów poprzez symbol Σ; • jak wykonać pomiar natężenia prądu w obwodzie z wykorzystaniem multimetru.	• dlaczego niepewność pomiarowa jest ważna i jak ją policzyć w dowolnym eksperymencie; • jak poprawnie podać wynik pomiaru wraz z niepewnością; • jak podważyć wynik eksperymentu (badania, teorii fizycznej) robiąc pojedynczy pomiar.

Obiektem badań wszystkich nauk przyrodniczych są rzeczywiste obiekty, ciała fizyczne, które możemy poznawać zmysłami. Możemy je widzieć, czuć lub usłyszeć. Podstawowym narzędziem więc dla tych nauk jest pomiar obiektu badania.

Do wykonania pomiaru stosuje się różne przyrządy pomiarowe. Łatwo zauważyć, że przyrządy pomiarowe charakteryzują się różną dokładnością – mamy przecież proste wagi łazienkowe i wysokiej klasy wagi laboratoryjne, centymetry krawieckie i precyzyjne suwmiarki. Wyniki pomiarów są z kolei głównym źródłem wiedzy, podstawą do wyciągania wniosków o otaczającym nas świecie, danym zjawisku czy obiekcie. Stąd tak ważne jest stosowanie precyzyjnych, jednakowych dla wszystkich zasad określania dokładności pomiaru, czy też niepewności wykonanego pomiaru. Międzynarodowa organizacja BIPM zaproponowała zasady opracowywania danych eksperymentalnych, wydając specjalne zalecenia ISO. Na stronie internetowej organizacji[1] udostępniony do pobrania został przewodnik „Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Zasad opracowanych przez BIPM przestrzega świat nauki oraz organizacje na całym świecie.

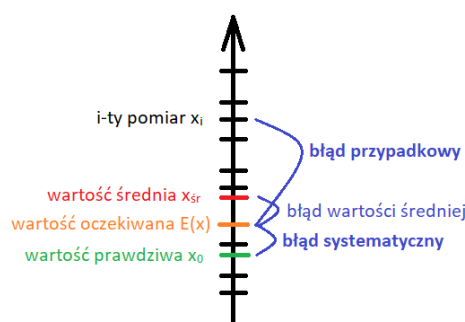
Wartość prawdziwa, błąd przypadkowy i systematyczny

Na początek warto sobie uświadomić, że każdy pomiar obarczony jest błędem. Nie istnieje doskonałe precyzyjny eksperymentator, tak jak nie istnieje idealnie zbudowany układ pomiarowy. Wynika z tego, że wartość prawdziwa charakteryzująca dane ciało nigdy nie zostanie zmierzona, odkryta. Możemy jedynie określić ją „mniej więcej”, podać lepsze lub gorsze jej przybliżenie. Sytuację tę dobrze opisuje wykres na rysunku 1.

Wykonując pomiar popełniamy pewien błąd. Błędem pomiaru nazywamy więc różnicę między wynikiem naszego pomiaru a wartością prawdziwą:

$$\Delta x_i = x_0 - x_i$$

Błąd może mieć dwie składowe – **błąd przypadkowy i systematyczny**. Pierwszy z nich jest **związany ze zjawiskiem losowości**: na przykład mierząc wzrost osoby przykładamy nieco inaczej miarkę w kolejnych próbach, lub mierzona osoba się wierci. Skutkuje to uzyskiwaniem nieco innych wyników przy każdej z prób. **Drugi z nich wynika z metody pomiaru czy**



Rysunek 1: Wartość prawdziwa oraz składowe błędy pomiarowego. Nie możemy zmierzyć wartości prawdziwej, możemy ją jednak oszacować poprzez podanie średniej z kilku pomiarów.

jakości przyrządu pomiarowego: w przypadku pomiaru wzrostu nie odczytamy wyniku dokładniej, niż pozwala na to podziałka miarki.

Błąd przypadkowy łatwo jest ograniczyć – zamiast zmierzyć wzrost raz, możemy pomiar wykonać kilka razy i wyciągnąć z wyników średnią. Okazuje się, że **im więcej pomiarów wykonamy, tym wynik będzie bliższy wartości prawdziwej**. W metrologii wyróżnia się wartość oczekiwaną z serii pomiarowej:

Wartość oczekiwana $E(x)$ to średnia z nieskończonej liczby pomiarów x_i

$E(x)$ nadal nie będzie jednak równa wartości prawdziwej – pozostanie pewien błąd systematyczny, którego wielkości nie określimy dokładnie.

Podstawy matematyczne rachunku błędów

Do określenia niepewności pomiaru niezbędna jest zrozumienie kilku wielkości:

Średnia arytmetyczna:

$$x_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1)$$

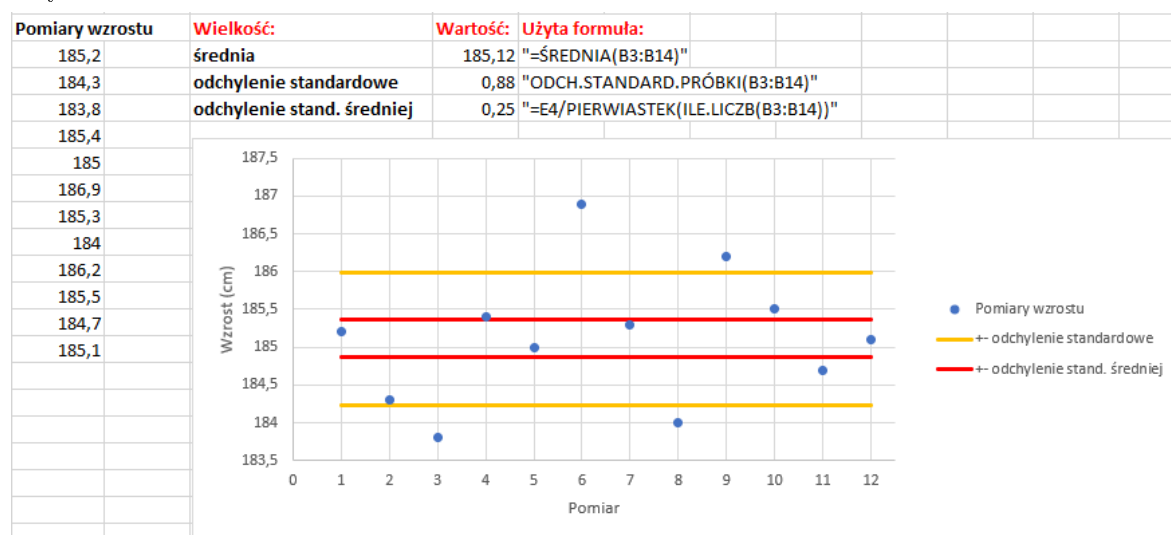
Odchylenie standardowe:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_r)^2}{N}} \quad (2)$$

Odchylenie standardowe średniej:

$$\sigma(x_{sr}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_r)^2}{N(N-1)}} \quad (3)$$

Wyobraźmy sobie, że mierzymy wzrost naszego kolegi. Zdajemy już sobie sprawę, że trudno nam jest precyzyjnie rozciągnąć miarkę między jego stopami i głową oraz, że kolega jest wierzcipiętą. Decydujemy się więc na wykonanie pomiaru 12 razy. Wyniki zapisujemy w tabeli, wyliczamy z nich średnią i odchylenia standardowe, a następnie nanosimy wszystko na wykres – rysunek 2.



Rysunek 2: Wyniki pomiarów wzrostu naniesione na wykres. Pomarańczowa i czerwona linia pokazują zakresy wzrostów obejmowane przez odchylenia standardowe.

Jak rozumieć w takim przypadku odchylenie standardowe?

W zakresie wzrostów $x_{sr} \pm \sigma(x)$ mieści się 68% wyników pomiarów

W zakresie wzrostów $x_{sr} \pm \sigma(x_{sr})$ mieści się wartość oczekiwana wzrostu z 68% pewnością

Dodatkowo można stwierdzić, że:

W zakresie wzrostów $x_{sr} \pm 2\sigma(x)$ mieści się 95% wyników pomiarów

W zakresie wzrostów $x_{sr} \pm 3\sigma(x)$ mieści się 99,7% wyników pomiarów

Podobne twierdzenia możemy dopisać dla 2 i 3 sigm dla wartości oczekiwanej

Wartości te są konsekwencją bardzo ważnego twierdzenia stosowanego w fizyce – **można matematycznie udowodnić, że pomiary w tego typu eksperymentach mają rozkład normalny (Gaussa)**. Oczywiście zdarzają się eksperymenty, gdzie pomiary mają inne rozkłady, nie mniej rozkład Gaussa jest bardzo powszechny i możemy go na nasze potrzeby przyjmować „w ślepo”.

Wyrażanie niepewności pomiarowych

Najważniejszą wielkością określającą błąd pomiaru jest **niepewność standardowa**. Jest ona sumą wszystkich rodzajów niepewności, jakie eksperymentator jest w stanie zdiagnozować. **Wyraża ona przedział, w jakim zawiera się poszukiwana wartość prawdziwa z 68% pewnością.**

Przewodnik ISO[1] podaje dwie metody wyznaczania wartości niepewności standardowej: **Metoda A:** w przypadku, gdy mamy serię pomiarów, niepewnością standardową jest odchylenie standardowe średniej z serii (porównaj z przykładem ze wzrostem)

$$u_A(x) = \sigma(x_{sr}) \quad (4)$$

W praktyce często mówi się, że seria pomiarowa powinna mieć co najmniej 10 pomiarów. Liczba pomiarów zależy jednak od dokładności, jaką chcemy uzyskać.

Metoda B: zakładamy pewną niepewność graniczną (maksymalną). Niepewność standardowa jest równa niepewności granicznej podzielonej przez $\sqrt{3}$

$$u_B(x) = \frac{\Delta x_{max}}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

Niepewność standardowa jest pierwiastkiem sumy kwadratów niepewności ze wszystkich źródeł:

$$u(x) = \sqrt{u_{A1}^2(x) + u_{A2}^2(x) + \dots + u_{B1}^2(x) + u_{B2}^2(x) + \dots} \quad (6)$$

Wróćmy do przykładu ze wzrostem. Wykonaliśmy serię 12 pomiarów miarką o podziałce równej 1mm. Zauważyliśmy już, że jedną z przyczyn błędów jest przypadkowy rozrzut wyników. Jest to niepewność typu A, którą wyrazimy poprzez odchylenie standardowe średniej.

$$u_A(x) = 0,25cm = 2,5mm$$

Czy są inne źródła błędów w tym pomiarze? Zwróćmy uwagę, że nasze odczyty mają skończoną precyzję – nie odczytamy wyniku dokładniej, niż pozwala na to podziałka. 1mm jest więc naszą niepewnością graniczną typu B:

$$u_B(x) = \frac{1mm}{\sqrt{3}} = 0,67mm$$

Niepewność standardowa pomiaru wynosi:

$$u(x) = \sqrt{2,5^2 + 0,67^2} = 2,6(mm)$$

Przykład z multimetrem

Chcemy zmierzyć natężenie prądu płynącego w obwodzie jak na rysunku 3. Włączmy w obwód multimetr przełączony w tryb pomiaru natężenia prądu na zakresie 20 mA i zamykamy obwód włącznikiem. Okazuje się, że multimetr pokazuje stałą wartość 0,48mA. Czy możemy uznać, że wyznaczaliśmy natężenie prądu bez błędu, skoro wartość nie fluktuuje?

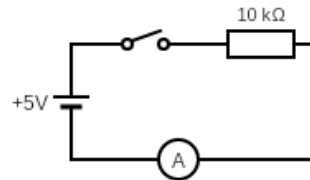
Producenci przyrządów pomiarowych najczęściej podają w instrukcji lub na opakowaniach metodykę wyznaczania niepewności pomiarowych. W przypadku prostych multimetrów najczęściej znaleźć można takie lub podobne sformułowanie:

$$\pm 0,9\% \text{ rdg} \pm 3 \text{ dgt}$$

Oznacza ono, że niepewność graniczna dla pomiaru wynosi 0,9% odczytu (ang. reading) + 3 cyfry (ang. digits, chodzi o najmniejszą cyfrę, jaką można odczytać z miernika). W przypadku naszego pomiaru niepewności prezentują się więc następująco:

$$\begin{aligned} u_A(x) &= 0 \\ u_B(x) &= \frac{0,9\% \cdot 0,48 + 3 \cdot 0,01}{\sqrt{3}} = \frac{0,034}{1,73} = 0,02(\text{mA}) \\ u(x) &= \sqrt{0^2 + 0,02^2} = 0,02(\text{mA}) \end{aligned}$$

Rysunek 3: Schemat układu do pomiaru natężenia prądu



Poprawny zapis wyników

Podając wyniki przeprowadzonych pomiarów należy przestrzegać zasad:

- Wynikiem pojedynczego pomiaru jest odczyt z przyrządu, wynikiem eksperymentu z serią pomiarów – średnia arytmetyczna
- Wynik zawsze podajemy z niepewnością
- Niepewność najczęściej podajemy jako niepewność standardową dopisaną w nawiasie:

$$10,2(0,1) \text{ A} \quad \text{lub} \quad 10,2(1) \text{ A}$$

– oba zapisy oznaczają to samo i są poprawne

- Niepewność można podać jako niepewność graniczną – wtedy zapisujemy $\pm$, np.:

$$10,2 \pm 0,2 \text{ A}$$

- Niepewność podajemy z co najwyżej dwoma cyframi znaczącymi. Wygodnie przyjąć zasadę, że jeśli pierwsza cyfra znacząca to „1” lub „2”, to podajemy dwie cyfry znaczące, natomiast jeśli „3” i więcej – jedną. Niepewności ZAWSZE zaokrąglamy w górę. Przykłady:

$$0,483 \text{ A} \Rightarrow 0,5 \text{ A}$$

$$0,2333 \text{ A} \Rightarrow 0,24 \text{ A}$$

$$5,28 \text{ A} \Rightarrow 6 \text{ A}$$

- Wynik pomiaru podajemy z liczbą cyfr znaczących odpowiadającą niepewności. Wynik pomiaru zaokrąglamy zgodnie z zasadami matematyki (od „5” w górę, poniżej „5” – w dół), na przykład:

$$U = 1,275 \text{ V} \quad i \quad u(U) = 0,12 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad U = 1,28(12) \text{ V} \quad \text{lub} \quad U = 1,28(0,12) \text{ V}$$

$$P = 133,24 \text{ W} \quad i \quad u(P) = 6 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad P = 133(6) \text{ W}$$

W przytoczonych wcześniej przykładach wynik pomiaru wzrostu możemy zapisać:

$$Wzrost = 185,1(3) \text{ m}$$

Wynik pomiaru natężenia prądu wyniósł:

$$I = 0,48(0,02) \text{ mA}$$

Przykład z pomiarem masy

Pan Kowalski postanowił się zważyć na prostej wadze łazienkowej. Po pierwszych próbach zauważył, że wynik na wadze zmienia się, zdecydował się więc na wykonanie serii pomiarowej. Wyniki pomiarów przedstawia tabela 1.

Nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Masa	82,9	82,5	81,2	81,5	83,3	78,9	82,6	83,0	81,9	81,0

Tabela 1: Wyniki pomiarów masy na wadze łazienkowej

Wyniki zostały naniesione na wykres – rysunek 4. Na wykresie łatwo zauważyć, że pomiar 6 wyraźnie odstaje od pozostałych wyników. Taki przypadek należy od razu odrzucić z analizy jako błąd gruby. Dla pozostałych 9 pomiarów obliczamy średnią, odchylenie standardowe i odchylenie standardowe średniej zgodnie ze wzorami 1, 2 i 3. Do tego celu możemy wykorzystać też podane w poprzednim przykładzie formuły programu excel:

$$m_{sr} = 82,21kg$$

$$\sigma(m) = 0,84kg$$

$$\sigma(m_{sr}) = 0,28kg$$

Niepewność typu A wynosi więc:

$$u_A(m) = 0,28kg$$

Teraz niepewność typu B – podziałka wagi to 0,1 kg, a więc niepewność wynosi:

$$u_B(m) = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,058kg$$

Otrzymana niepewność standardowa będzie pierwiastkiem sumy kwadratów niepewności składowych:

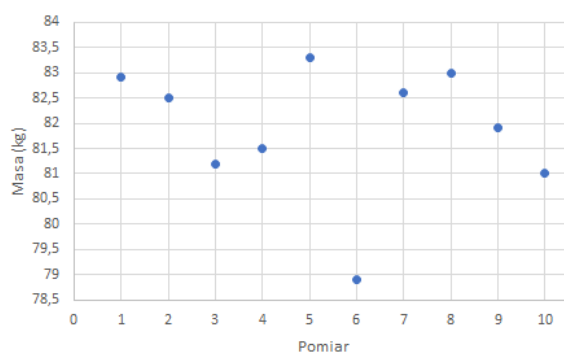
$$u(m) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{0,28^2 + 0,058^2} = 0,29(kg)$$

Masa pana Kowalskiego wynosi (0,29 kg możemy spokojnie zaokrąglić już w górę):

$$m = 82,2(3)kg$$

Następnego dnia pan Kowalski ponownie stanął na wadze. Okazało się, że przyrząd pokazuje wartości w okolicach 83 kg! Eksperymentator zaczął podejrzewać, że wyniki te są zbyt duże w porównaniu do obliczonej poprzedniego dnia średniej. Jak stwierdzić, czy nie popełniono błędu?

Na rysunku 5. przedstawiono porównanie wyników średnich z dwóch dni. Jak widać **nowa średnia wykracza poza poprzednio obliczoną wagę o więcej, niż niepewność oszacowania**. Jesteśmy więc pewni, że popełniono błąd. Co może być jego źródłem?

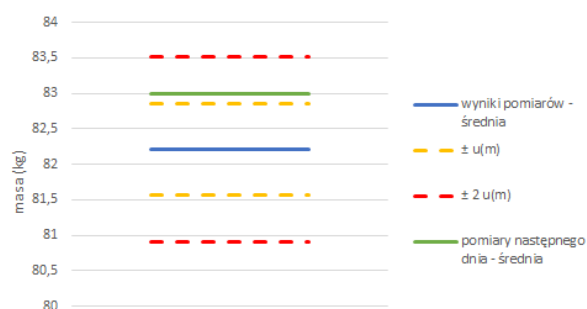


Rysunek 4: Wyniki pomiarów masy na wadze łazienkowej. Wyniki fluktuują w skończonym zakresie, pomiar 6 odstaje i może zostać odrzucony (błąd gruby).



Rysunek 5: Średnia pomiarów masy z drugiego dnia różni się od poprzedniej średniej. Wynik nie mieści się w przedziale $\pm u(m)$ (w którym znajduje się prawdziwa masa z 67% pewnością), ani w przedziale $\pm 2u(m)$ (w którym znajduje się prawdziwa masa z 95% pewnością!)

Pan Kowalski wykonał pomiary w ciągu kilku minut. Nie wziął pod uwagę fizjologii organizmu – być może rano następnego dnia zjadł obfite śniadanie i wypił dużą kawę? **Fizjologia organizmu jest kolejnym źródłem niepewności!**



Rysunek 6: Średnia pomiarów z drugiego dnia nieznacznie wykracza poza obszar $\pm u(m)$ - nie ma powodu by sądzić, że ponownie popełniono błąd w szacowaniu niepewności

kowo możemy przyjąć, że wartością graniczną jest np. 1 kg i na jej podstawie obliczyć niepewność standardową (Niepewność typu B).

Zastosujmy drugą metodę. Błąd graniczny wynosi 1 kg, a więc niepewność standardowa typu B wynosi:

$$u_{B2}(m) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58 \text{ kg}$$

Całkowita niepewność standardowa, złożona z trzech składowych wyniesie:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_{B1}^2(x) + u_{B2}^2(x)} = \sqrt{0,28^2 + 0,058^2 + 0,58^2} = 0,65 \text{ (kg)}$$

Masa pana Kowalskiego z uwzględnieniem poprawki wynosi:

$$m = 82,2(7) \text{ kg}$$

Jeszcze o źródłach niepewności

Zauważmy na koniec, że niepewności z niektórych źródeł są pomijalnie małe w porównaniu do innych. Tak jest w przypadku eksperymentu z masą – niepewność typu B wynikająca z podziałki wagi jest znacznie mniejsza niż dwie pozostałe składowe. Gdybyśmy nie uwzględnili tego składnika, niepewność standardowa pomiaru po zaokrągleniu wyniosłaby dokładnie tyle samo – 0,64 kg (proszę sprawdzić!). Warto mieć to na uwadze – **po przeanalizowaniu wszystkich potencjalnych źródeł niepewności eksperymentator może ocenić, które z nich są dominujące i tylko je uwzględnić.** Jest to dobry sposób na optymalizację czasu, a czasem i kosztów eksperymentu.

Tvoja kolej

Zaproponuj eksperyment fizyczny, w którym dokonasz pomiaru wybranej wielkości fizycznej. Zastanów się, co może być źródłem błędów. Które z nich są istotne, a które pomijalnie małe? Podziel źródła niepewności na typ A i B. Na koniec możesz przeprowadzić pomiary i zapisać wynik z niepewnością.

Literatura

- [1] *Guides in Metrology*, <https://www.bipm.org/en/publications/guides>, dostęp: 26.01.2022
- [2] Urbański M. K., *Opracowywanie danych doświadczalnych*, Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej, 2016